Función exponencial

La función exponencial tiene la forma $y = k \cdot a^x$, siendo k y a números reales.

Cada valor de y se obtiene multiplicando el valor anterior por una cantidad constante a.

Para $x = 0$, $y = k$.

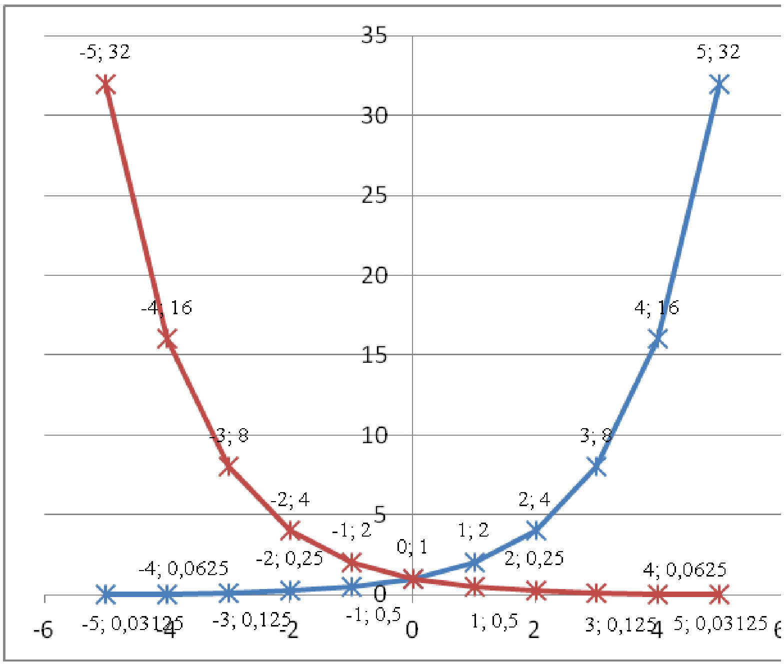
Si $a > 1$ la función (y) es creciente.

Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.

La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos: crecimiento animal o vegetal, crecimiento económico… siendo en todos los casos la variable independiente el tiempo ($x = t$).

Veamos como ejemplos las siguientes funciones:

$y = 2^x$			$y = 2^{-x}$	
x	y		x	y
-5	0,03125		-5	32
-4	0,0625		-4	16
-3	0,125		-3	8
-2	0,25		-2	4
-1	0,5		-1	2
0	1		0	1
1	2		1	0,5
2	4		2	0,25
3	8		3	0,125
4	16		4	0,0625
5	32		5	0,03125



Aplicaciones de la función exponencial

La función exponencial se utiliza en procesos que evolucionan de forma que el aumento (o disminución) en un intervalo de tiempo sea proporcional al contenido que existía al principio. Como es el caso de: crecimiento de poblaciones, desintegración radioactiva, interés de dinero acumulado…

1) **Crecimiento de poblaciones.** Es la diferencia entre los nacimientos y las defunciones que se producen en una población. Este viene dado por la ecuación:

$$P = P_0 \cdot (1 + i)^t$$

Donde P_0 es la población inicial (t = 0 años). P es la población en el tiempo t.

i es el índice de crecimiento (en tanto por 1) y t es el tiempo en años.

2) **Desintegración radiactiva.** Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo, es decir, unos elementos químicos se transforman en otros diferentes. La forma de hacerlo viene dada por la fórmula:

$$m = m_0 \cdot e^{-at}$$

Donde m_0 es la masa inicial de la sustancia que se desintegra. m es la masa en el instante t.
a es la constante radiactiva, que en física nuclear suele escribirse como λ $(= \frac{Ln\,2}{T})$.
T es el período de semidesintegración (tiempo en reducirse a la mitad la muestra inicial).

3) **Interés compuesto.** Los intereses producidos se van acumulando al capital inicial (C_0), y así producir nuevos intereses. El capital que se va obteniendo en un tiempo t viene dado por:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Donde r es el rédito anual (interés anual en %). C es el capital en un tiempo t.
t es el intervalo de tiempo en que los intereses se acumulan al capital (periodo de capitalización o de acumulación).
Si en lugar de utilizar intervalos de años se utilizan meses, trimestres… la ecuación toma la forma:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n \cdot 100}\right)^{n \cdot t}$$

Donde n vale 12 en meses, 4 para trimestres, 365 para días…

Ecuaciones exponenciales

Ya conocemos las propiedades de las potencias. Ahora vamos a utilizar estas para resolver ecuaciones. Ejemplo: $2^{2x-1} = 4$

$$2^{2x-1} = 2^2 \text{ ==> } 2x - 1 = 2 \text{ ==> } 2x = 3 \text{ ==> } x = \frac{3}{2}$$

Otros ejemplos:

$\sqrt[3]{8^x} = 65536$

$2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$

Logaritmo de un número. Operaciones

El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número:

$$\log_a x = y \text{ ==> } a^y = x \text{ para } a > 0 \;\; y \;\; a \neq 1$$

Ejemplos:

$\log_2 4 = 2$ $\qquad$ $2^2 = 4$

$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = y$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 0.25$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\qquad$ $y = 2$

$\log_{\sqrt{5}} 125 = y \qquad \sqrt{5}^{y} = 125 \qquad 5^{\frac{1}{2}y} = 5^{3} \qquad y = 6$

De la definición de logaritmo podemos deducir:

No existe		
$\log_{-a} x$		$\log_a 1 = 0$
$\log_a -x$		$\log_a a = 1$
$\log_a 0$		$\log_a a^n = n$

Las propiedades de los logaritmos las podemos clasificar en:

1) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

2) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) - \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left(\frac{8}{4}\right) - \log_2 8 \quad \log_2 4 - 3 \quad 2 - 1$$

3) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$$

4) El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_2 \left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5) Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Existen tablas que tabulan los valores de los logaritmos, pero es más fácil utilizar una calculadora. Sin embargo éstas solo tienen dos tipos de logaritmos:

Logarítmos decimales:

Son los que tienen **base 10**. Se representan por **log (x).**

Logarítmos neperianos:

Son los que tienen **base e**. Se representan por **ln (x) o L(x).**

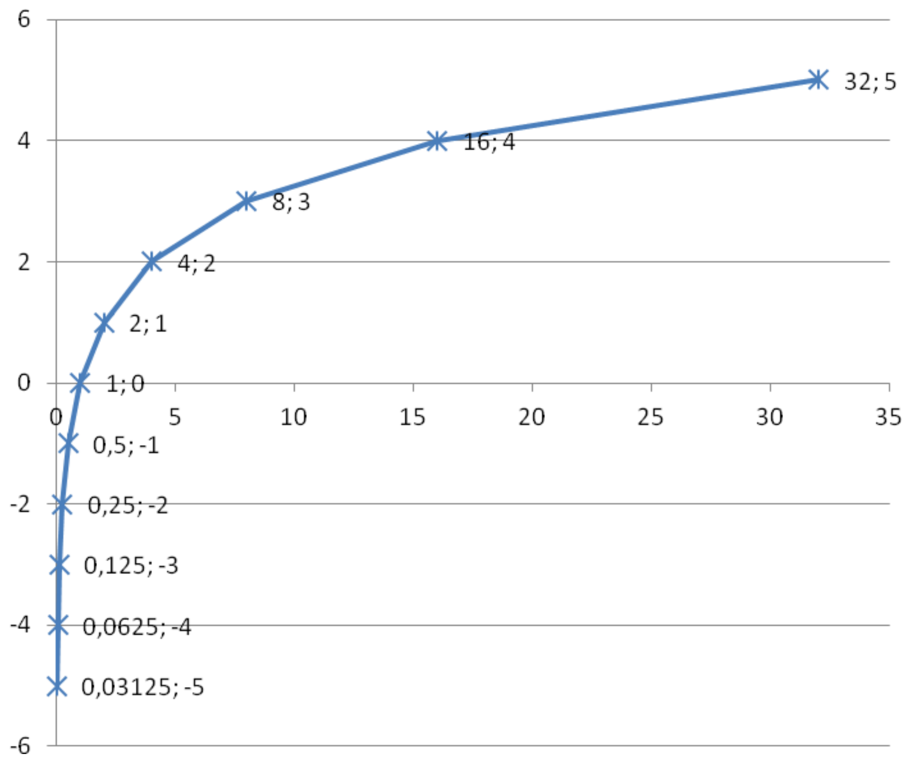
Ejemplo: Sabiendo que *log* 2 = 0,301030 y *log* 7 = 0,845098, calcular log_7 2.

$$log_7 2 = \frac{log\ 2}{log\ 7} = \frac{0,301030}{0,845098} = 0,356207$$

Función logaritmo

Esta es la inversa de la función exponencial: $y = \log_a x$, con $a > 0$ y distinto de 1.

Anteriormente hemos representado la función 2^x, ahora lo hacemos con $y = \log_2 x$:



El dominio de esta función son los números reales positivos.

La curva asociada a la función intersecta al eje de abscisas en el punto (1,0).

Si $a > 1$, entonces la función es creciente.

Si $0 < a < 1$, entonces la función es decreciente.

Ecuaciones logarítmicas

Son igualdades en las que intervienen logaritmos y donde la incógnita forma parte del argumento (antilogaritmo) de al menos uno de ellos. Ejemplo: $\log(x^2 - 18) = \log 3 + \log x$

$\log(x^2 - 18) = \log(3\,x)$

$$x^2 - 18 = 3x \implies x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{3+9}{2} = 6 \\ x = \dfrac{3-9}{2} = -3 \end{cases}$$